

Лекция 6

Тема. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

План лекции:

- 1) Понятие производной функции (Производная. Односторонние производные. Дифференцируемость функции. Геометрический и физический смысл производной. Связь между дифференцируемостью и существованием производной, а также между дифференцируемостью и непрерывностью в точке. Свойства дифференцируемых функций. Таблица производных основных элементарных функций.
- 2) Дифференциал. (Определение дифференциала. Свойства дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
- 3) Производная сложной функции и обратной функции.
- 4) Производные функций заданных параметрически, или неявно.
- 5) Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

§1. Понятие производной функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Приращением функции

$y = f(x)$ в точке x_0 называется разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, где $\Delta x = x - x_0$ -

приращение аргумента в точке x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существует предел

(конечный или бесконечный) отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю, то этот предел называется *производной* (конечной или бесконечной) функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается одним из следующих символов:

$f'(x_0), y'(x_0), \frac{dy(x_0)}{dx}$. Таким образом, по определению:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пределы (конечные или бесконечные)

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой и правой производными* функции $y = f(x)$ (конечной или бесконечной) в точке x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0 , если её приращение Δy может быть представлено в виде

$$\Delta y = A(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \text{ где } A(x_0) \in R.$$

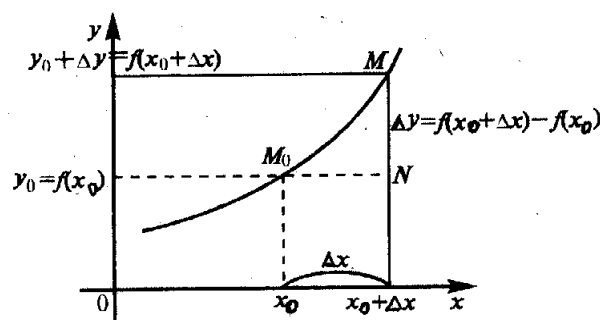
Теорема (Критерий дифференцируемости функции). Для того чтобы функция $y = f(x)$ являлась дифференцируемой в данной точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Операция нахождения производной y' называется *дифференцированием* функции $y = f(x)$.

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X , называется *дифференцируемой* на этом промежутке.

Геометрический смысл производной:

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ или $F(x, y) = 0$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ есть угловой коэффициент касательной (тангенс угла ее наклона с положительным направлением оси абсцисс).



Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$

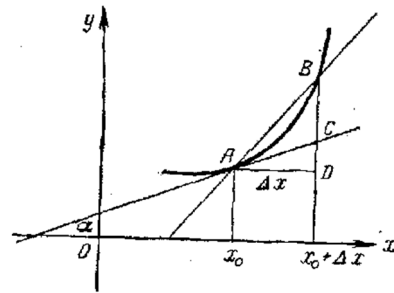
имеет вид: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

При $f'(x_0) = 0$ уравнение нормали имеет вид $x = x_0$.

Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.



Физический (механический) смысл производной:

Если точка движется по закону $s = s(t)$, где s - путь, t - время, то $s'(t)$ представляет скорость изменения пути в момент t , т.е. скорость есть производная пути по времени. Вторая производная пути по времени $s''(t) = [s'(t)]' = v'(t)$ есть скорость изменения скорости или ускорение точки в момент t .

Теорема (Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она в этой точке непрерывна.

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т. е., если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, т. к. $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, но не дифференцируема в этой точке. В математике также известны

непрерывные функции, не дифференцируемые ни в одной точке.

Таким образом, непрерывность функции – необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции.

Замечание. Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке, то функция называется *гладкой* на этом промежутке. Если же производная функции допускает конечное число точек разрыва (причем первого рода), то такая функция на данном промежутке называется *кусочно гладкой*.

Правила дифференцирования.

Если C – постоянное число и $u = u(x)$, $v = v(x)$ - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы равенства:

$$1) (C)' = 0; \quad 2) (Cu)' = Cu'; \quad 3) (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 4) (uv)' = u'v + uv'; \quad 5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

На основании определения производной и правил дифференцирования можно составить **таблицу производных** основных элементарных функций:

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е. $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют логарифмическим дифференцированием. В случаях, когда надо найти производную от функции вида $y(x) = u(x)^{v(x)}$, то предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = (u^v)' = (e^{v \ln u})' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'$$

Пример 1. Для функции определить левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$,

$$\text{если } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Решение. Вычислим производную $\forall x \neq 0$: $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(1 + x) + x}{x(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}$

Докажем, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0)$. $\Rightarrow$ Можно найти правую и левую производные в этой точке:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x(1 + e^{\frac{1}{x}})} = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{x(1 + e^{\frac{1}{x}})} = 1$$

Пример 2. Найти значение производной функции $y = |x|$ в точке $x=0$.

Решение. При любом приращении независимой переменной x равном Δx , приращение функции в точке $x=0$.

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & \text{если } \Delta x < 0, \\ \Delta x, & \text{если } \Delta x > 0. \end{cases} \quad \text{Из определения производной следует, что}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{если } \Delta x < 0, \\ 1, & \text{если } \Delta x > 0. \end{cases} \quad \text{Это означает, что в точке } x=0 \text{ функция } y = |x| \text{ не имеет}$$

производной, хотя она и непрерывна в этой точке, поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0$.

Пример 3. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^3}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем $\ln y = x^3 \ln \sin 2x$. Дифференцируем обе части последнего равенства по x : $(\ln y)' = (x^3)' \ln \sin 2x + x^3 (\ln \sin 2x)'$. Отсюда

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln \sin 2x + x^3 \frac{1}{\sin 2x} 2 \cos 2x. \quad \text{Далее, } y' = y(3x^2 \ln \sin 2x + 2x^3 \operatorname{ctg} 2x). \quad \text{Окончательно имеем:}$$

$$y' = (\sin 2x)^{x^3} (3x^2 \ln \sin 2x + 2x^3 \operatorname{ctg} 2x).$$

§2. Дифференциал.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Можно записать следующее:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая величина при $\Delta x \rightarrow 0$, откуда $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых:

- 1) линейного относительно Δx ;
- 2) нелинейного, представляющего бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx , ибо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

Сравнивая полученный вид приращения Δy с его видом в определении дифференцируемой функции в точке x_0 , получим, что $A(x_0) = f'(x_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциалом (или первым дифференциалом) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (дифференцируемой в этой точке) называется функция аргумента Δx :

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

При $f'(x_0) \neq 0$ дифференциал является главной (линейной относительно Δx) частью приращения функции в точке x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциалом независимой переменной x называется приращение этой переменной: $dx = \Delta x$.

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид: $dy = f'(x_0)dx$.

Очевиден тот факт, что для существования дифференциала функции $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $f'(x_0)$.

Справедливы следующие утверждения относительно свойств дифференциала:

$$1) d\mathbf{c} = \mathbf{0}, \text{ где } \mathbf{c} = \text{const.} \quad 2) d(\mathbf{c}u) = \mathbf{c} du. \quad 3) d(u \pm v) = du \pm dv.$$

$$4) d(uv) = v du + u dv. \quad 5) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

6) Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ - дифференцируемые функции от своих аргументов, то дифференциал функции $df(u) = f'(u)du$, это означает, что формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от независимой переменной x рассматривать функцию от зависимой переменной u . Это свойство дифференциала получило название инвариантности (т. е. неизменности) формы первого дифференциала.

7) Применение дифференциала в приближенных вычислениях. При достаточно малых значениях Δx приращение функции $\Delta y \approx dy$, т.е. $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$. Чем меньше значение Δx , тем точнее данная формула. Можно также записать в виде асимптотического равенства

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

позволяющую при малых значениях $x - x_0$ приближенно вычислять значения функции в точках x близких к точке x_0 , где значения функции f и ее производной известны.

Пример 4. Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определить: 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$; и сравнить их, если:

а) $\Delta x = 1$, б) $\Delta x = 0,1$, в) $\Delta x = 0,01$

Решение. $f(1) = 0$

$$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1 - 0 = \Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 \quad (1)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$df(1) = f'(1) \cdot \Delta x \Rightarrow df(1) = \Delta x \quad (2)$$

$\Rightarrow$ по формулам (1) и (2) получаем:

	$\Delta f(1)$	$df(1)$
а) $\Delta x = 1$	5	1

б) $\Delta x = 0,1$	0,131	0,1
в) $\Delta x = 0,01$	0,010301	0,01

§3. Производные сложной функции и обратной функции.

Производная сложной функции.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную $\varphi'(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в точке $u_0 = \varphi(x_0)$ конечную производную $f'(u_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x)) = F(x)$ дифференцируема в точке x_0 , причем $F'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$ или $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. (То есть производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной).

Пример 5. Найти производную функции $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3$

Решение. Здесь $y = u^3$, $u = x^2 + \frac{1}{x}$. Значит

$$y' = (u^3)' \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = 3u^2 \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) = 3\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 \left(2x - \frac{1}{x^2}\right).$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \sqrt{\sin(\ln x)}$

Решение. Здесь $y = \sqrt{t}$, $t = \sin u$, $u = \ln x$. Применяв правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = (\sqrt{t})' \cdot (\sin u)' \cdot (\ln x)' = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos u \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} (\sin u)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos u \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} (\sin \ln x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{2x\sqrt{\sin \ln x}}.$$

Производная обратной функции.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ - определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 существует производная $f'(x_0) \neq 0$, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, имеющая производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (\text{или } x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad y'_x \neq 0).$$

§4. Производные функций заданных параметрически, или неявно.

Производная функции, заданной параметрически.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Систему соотношений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\alpha < t < \beta$, называют параметрическим представлением функции $y = f(x)$, если $\psi(t) = f(\varphi(t))$ для всех $t \in (\alpha, \beta)$. Переменная t называется в этом случае параметром.

Пусть функция f задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha < t < \beta,$$

где $y = f(x)$ и функции φ и ψ дифференцируемы, причем $\varphi'(t) \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Можно также записать в виде: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

Производная функции, заданной неявно.

Функция называется **явной**, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например, функция $y = x^2 + 5x + 1$.

Функция y аргумента x называется **неявной**, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция $y (y \geq 0)$, заданная уравнением $x^3 + y^2 - x = 0$. (Заметим, что последнее уравнение задает две функции, $y = \sqrt{x - x^3}$ при $y \geq 0$, и $y = -\sqrt{x - x^3}$ при $y < 0$).

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то, дифференцируя тождество $F[x, f(x)] \equiv 0$ по x (как сложную функцию), можно определить $f'(x)$. Дифференцируя выражение $f'(x)$ по x , можно определить $f''(x)$ и т. д.

$$\frac{d}{dx}(F(x, f(x))) = 0.$$

То есть мы дифференцируем обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x , а затем из полученного уравнения находим производную y' .

§5. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве X . Производная $f'(x)$ этой функции является функцией от x на X . Следовательно, можно говорить о производной полученной функции, т. е. о производной от первой производной. Если она существует, то её называют производной второго порядка функции $y = f(x)$, или просто второй производной и обозначают $f''(x)$ или y'' . Т. е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Аналогично если существует производная от второй производной, то её называют третьей производной и обозначают $f'''(x) = (f''(x))'$ и т.д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Производной n -го порядка называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции: $y'' = (y')'$, $y''' = (y'')'$, ..., $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Обозначают

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале (a, b) , то кратко пишут $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. В частности, если $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на (a, b) , то употребляют запись: $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

Механический смысл второй производной. Ранее было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$ (где s - путь, t - время), то $s'(t)$ представляет скорость изменения пути в момент t_0 . Следовательно, вторая производная пути по времени $s''(t_0) = (s'(t_0))'$ есть скорость изменения скорости или ускорение точки в момент t_0 .

Найдем производные n -го порядка от основных элементарных функций.

Справедливы формулы

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad a > 0;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right);$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1) \dots (m-n+1)x^{m-n};$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциалом n -го порядка $d^n y$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка этой функции, т.е. $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

В частности, $d^2 y = d(dy)$.

Если x — независимая переменная, то $dx = \text{const}$ и $d^2 x = d^3 x = \dots = d^n x = 0$. В этом случае справедлива формула

$$d^n f(x) = f^n(x)(dx)^n.$$

В заключение отметим, что дифференциалы второго и более высоких порядков не обладают свойством инвариантности формы в отличие от дифференциала первого порядка.

Теорема (Формула Лейбница).

Если u и v — n -кратно дифференцируемые функции, то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}.$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ — число сочетаний из n элементов по i .

Аналогично для дифференциала $d^n(uv)$ получаем:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i}u d^i v,$$

где положено $d^0 u = u$ и $d^0 v = v$.

Пример 7. Найдем производную третьего порядка функции $y = 3x^3 + 1$.

Решение. $y' = (3x^3 + 1)' = 9x^2$; $y'' = (9x^2)' = 18x$; $y''' = (18x)' = 18$.

Пример 8. $(x \cdot \cos x)^{(100)} = x(\cos x)^{(100)} + 100(\cos x)^{(99)} = x \cdot \cos x + 100 \sin x$.